# РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАЧ
# III Олимпиады МГУ им. Н.П. Огарёва по математике для школьников г. о. Саранск (2012–2013 учебный год)

## 6 КЛАСС

**Задача 1.** Сколько лет брату и сестре, если в прошлом году брат был старше сестры в три раза, а в будущем году сестра будет младше брата в два раза? *(О.Г. Костров)*

**Ответ.** Брату 7 лет, сестре 3 года.

**Решение.** Пусть возраст брата — $x$ лет, возраст сестры — $y$ лет. Тогда по условию справедливы равенства $x-1=3(y-1)$, $x+1=2(y+1)$. Из первого уравнения имеем $x=3y-2$, тогда во втором получим $3y-2+1=2y+2$. Отсюда находим $y=3$, и поэтому $x=7$.

**Критерии оценивания.**

1). Записано уравнение, связывающее возрасты брата и сестры — по *2 балла* за каждое уравнение.

2). Получена зависимость одного возраста через другой — еще *3 балла*.

3). Указан только правильный ответ — *2 балла*.

4). Проведено решение задачи, но не записаны зависимости, связывающие возрасты брата и сестры, указан правильный ответ — *5 баллов*.

**Задача 2.** Определить, какой цифрой оканчивается число $20^{13}+13^{20}$. *(Д.А. Еремин, О.Г. Костров, А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** 1.

**Решение.** Заметим, что число $20=2\cdot10$ оканчивается на 0, поэтому любая его степень, а, значит, и число $20^{13}$ тоже оканчивается на 0. Число $13^{20}=$ $=(10+3)^{20}$ оканчивается на ту же цифру, что и число $3^{20}=(3^4)^5=81^5=$ $=(80+1)^5$, а, значит, на ту же цифру, что и число $1^5=1$, то есть на 1. Поэтому число $20^{13}+13^{20}$ оканчивается на $0+1=1$.

**Критерии оценивания.**

1). Присутствует идея о том, что надо найти последнюю цифру каждого из слагаемых, а затем сложить результаты — *3 балла*.

2). Отмечено, что число $20^{13}$ оканчивается на 0 — *2 балла*.

3). Отмечено, что числа $13^{20}$ и $3^{20}$ оканчиваются на одну цифру — *2 балла*.

4). Найдена последняя цифра 1 числа $13^{20}$ — дополнительно *3 балла*.

**Задача 3.** На конце часовой стрелки сидит паук, на конце минутной стрелки — муха. Часы показывают 15 минут первого. Через сколько минут муха окажется на наибольшем расстоянии от паука? *(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** Через $17\frac{8}{11}$ минут.

**Решение.** Муха окажется на наибольшем расстоянии от паука, когда угол между часовой и минутной стрелкой составит 180° (половину циферблата). В 12:00 стрелки сонаправлены. Учтем, что минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой: когда она преодолеет полный круг, часовая сдвинется всего на 1 деление. Пусть $x$ — угол (в градусах), на который повернется часовая стрелка (считая от 12:00), тогда минутная повернется на $12x$. Поэтому $12x = x + 180°$, $x = \dfrac{180°}{11} < 30° = \dfrac{360°}{12}$. Значит, часовая стрелка не выйдет за пределы сектора между 12 и 1. Тогда угол поворота минутной стрелки равен $180 \cdot \dfrac{12}{11}$ градусов. Полный оборот (60 минут) соответствует 360 градусам. Поэтому, повернувшись на найденный угол, минутная стрелка покажет $\dfrac{360}{11} =$ $= 32\dfrac{8}{11}$ минут. Значит, этот момент настанет через $32\dfrac{8}{11} - 15 = 17\dfrac{8}{11}$ минут.

**Критерии оценивания.**

1). Присутствует идея о том, что концы часовой и минутной стрелок диаметрально противоположны — *1 балл.*

2). Присутствует указание, что минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой — *2 балла.*

3). Найден угол поворота минутной стрелки — *3 балла.*

4). Угол поворота переведен в минуты на циферблате — *3 балла.*

5). Найдена разница между нынешним моментом времени и искомым — *1 балл.*

*Замечание.* Возможны приближенные решения, которые оцениваются неполными баллами. Так, рассуждение “Концы стрелок диаметрально противоположны, значит, часовая показывает между 12 и 1, а минутная - между 30 и 35” оценивается 6 баллами вместо 9 баллов (+1 балл за нахождение длительности интервала). По сравнению с эталонным решением здесь есть 1-й, 3-й (не полностью) и 4-й пункт, но нет 2-го.

**Задача 4.** Убрать две из девяти спичек, изображающих число $\dfrac{VII}{XIV}$ так, чтобы получившаяся дробь оказалась вдвое меньше исходного числа.

*(О.Г. Костров, А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $\dfrac{III}{XII}$.

**Решение.** Вместо $\dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$ надо получить $\dfrac{1}{4}$. Эту дробь можно представить как $\dfrac{3}{12}$, что римскими цифрами записывается так: $\dfrac{III}{XII}$. Тем самым, надо “разрушить” две “пятерки” $V$ — одну в числителе, одну в знаменателе — превратив их в “единицы” $I$.

**Критерии оценивания.**

1). Найдено значение исходной дроби — *1 балл.*

2). Найдено числовое значение искомой (вдвое меньшей) дроби — *1 балл.*

3). Организован перебор представлений искомого числа:

а) только арабскими цифрами: $\dfrac{2}{4}$, $\dfrac{3}{6}$ и т.д. — *3 балла*;

б) римскими цифрами: $\frac{II}{IV}, \frac{III}{VI}$ и т.д. — *6 баллов*.

4). Выбран верный ответ — *2 балла*.

**Задача 5.** В январе Алиса и Базилио продавали разное мороженное по одной и той же цене. В феврале Алиса понизила цену на свое мороженное на 10%, а Базилио повысил цену на свое мороженное на 20%. В марте же наоборот, Алиса повысила цену на свое мороженное на 10%, а Базилио понизил цену на свое мороженное на 20%. Чье мороженное в марте стало стоить дешевле? *(О.Г. Костров, А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** Дешевле будет стоить мороженное Базилио.

**Решение.** Пусть в январе стоимость мороженного Алисы и Базилио равна $x$ рублей. Тогда в феврале стоимость мороженного Алисы будет равна $x \cdot \dfrac{100\% - 10\%}{100\%} = 0,9x$ рублей, а стоимость мороженного Базилио будет равна $x \cdot \dfrac{100\% + 20\%}{100\%} = 1,2x$ рублей. Поэтому в марте стоимость мороженного Алисы будет равна $0,9x \cdot \dfrac{100\% + 10\%}{100\%} = 0,9x \cdot 1,1 = 0,99x$ рублей, а стоимость мороженного Базилио будет равна $1,2x \cdot \dfrac{100\% - 20\%}{100\%} = 1,2x \cdot$ $\cdot\, 0,8 = 0,96x$ рублей. Следовательно, в марте мороженное Базилио с ценой $0,96x$ рублей будет дешевле мороженного Алисы с ценой $0,99x$ рублей.

**Критерии оценивания.**

1). Получены коэффициенты изменения стоимости мороженного с января по февраль $0,9$ и $1,2$ — по *2 балла* за каждый.

2). Получены коэффициенты изменения стоимости мороженного с февраля по март $1,1$ и $0,8$ — еще по *2 балла* за каждый.

3). Проведено сравнение цен в марте — *2 балла*.

*Замечание.* За вычисления на конкретном примере (“Пусть мороженое в январе стоило 100 рублей за порцию...”) из общей суммы вычитается *1 балл*.

## 7 КЛАСС

**Задача 1.** Доказать, что 6-значное число вида $\overline{abcabc}$ делится и на 7, и на 11, и на 13. *(А.О. Сыромясов)*

**Решение.** Нетрудно показать, что $\overline{abcabc} = 1001 \cdot (100a + 10b + c)$. Так как число $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то исходное число делится и на 7, и на 11, и на 13.

**Критерии оценивания.**

1). Показано, что число делится на 1001 — *4 балла*.

2). По *2 балла* прибавляется за проверку делимости 1001 на 7, на 11 и на 13 (за каждый делитель).

3). Задача решена для частного случая (показана делимость конкретного числа на 7, на 11 и на 13) — *3 балла*.

*Замечание.* Некоторые школьники могут знать признак деления на 11 и проверять делимость *исходного* числа *только* на 11. Согласно приведенной выше логике, это решение оценивается в *2 балла*.

**Задача 2.** Докажите, что замкнутая семизвенная ломаная не может иметь более 14 точек самопересечения. *(Д.А. Еремин)*

**Решение.** Каждое звено ломаной может содержать не более четырех точек пересечения с другими звеньями (лежащих внутри звена), поэтому всего точек не более $\dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

**Критерии оценивания.**
1). Показано, что каждое звено не может иметь больше 4 точек пересечений с другими звеньями — *7 баллов*.
2). Приведен пример ломаной, имеющей 14 точек самопересечения — *3 балла*.

**Задача 3.** После окончания конференции трое учёных выехали на такси из санатория "Математик" на железнодорожный вокзал. Такси ехало с такой постоянной скоростью $v$, чтобы приехать как раз к отходу поезда. В пути машина сломалась, и учёные сразу вызвали другое такси, которое выехало с вокзала. С какой постоянной скоростью должно было ехать второе такси, чтобы учёные смогли успеть к отходу поезда? *(О.Г. Костров)*

**Ответ.** Со скоростью $\geqslant 2v$.

**Решение.** Пусть расстояние от места поломки первого такси до вокзала равно $s$, тогда оставшееся время с момента поломки первого такси до отхода поезда равно $t = \dfrac{s}{v}$, откуда $s = vt$. Второе такси должно проехать расстояние, равное $s + s = 2s$, поскольку машина должна проехать от вокзала до места поломки первого такси и то же расстояние в обратном направлении. Следовательно, скорость второго такси должна быть не меньше $\dfrac{2s}{t} = \dfrac{2vt}{t} = 2v$.

**Критерии оценивания.**
1). Задача решена для частного случая — *4 балла*.
2). Рассмотрен *произвольный* момент поломки первого такси и показано, что скорость должна быть *равна* $2v$ — *8 баллов*.
3). Указано, что скорость второго такси должна быть *не меньше* $2v$ — дополнительно *2 балла*.
4). Указан только правильный ответ — *2 балла*.

**Задача 4.** Сколько лет брату и сестре, если в прошлом году брат был старше сестры в три раза, а в будущем году сестра будет младше брата в два раза? *(О.Г. Костров)*

**Ответ.** Брату 7 лет, сестре 3 года.

**Решение.** Пусть возраст брата — $x$ лет, возраст сестры — $y$ лет. Тогда по условию справедливы равенства $x - 1 = 3(y - 1)$, $x + 1 = 2(y + 1)$. Из первого уравнения имеем $x = 3y - 2$, тогда во втором получим $3y - 2 + 1 = 2y + 2$. Отсюда находим $y = 3$, и поэтому $x = 7$.

**Критерии оценивания.**

1). Записано уравнение, связывающее возрасты брата и сестры — по *2 балла* за каждое уравнение.

2). Получена зависимость одного возраста через другой — еще *3 балла*.

3). Указан только правильный ответ — *2 балла*.

4). Проведено решение задачи, но не записаны зависимости, связывающие возрасты брата и сестры, указан правильный ответ — *5 баллов*.

**Задача 5.** В треугольнике $\triangle ABC$ проведены высоты $AD$ и $CE$, которые пересекаются в точке $F$. Известно, что треугольники $\triangle AEF$ и $\triangle CDF$ равны. Доказать, что треугольник $\triangle ABC$ — равнобедренный. *(А.О. Сыромясов)*

**Решение.** Достаточно доказать, что $\angle A = \angle C$. В свою очередь, для этого можно доказать, что $\angle EAF = \angle DCF$ и $\angle CAF = \angle ACF$. Первое равенство следует непосредственно из равенства $\triangle AEF$ и $\triangle CDF$. Далее, в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Поэтому $AF = FC$. Значит, $\triangle AFC$ — равнобедренный. Этот факт завершает доказательство.

**Критерии оценивания.**

1). Есть идея о том, что надо доказать равенство углов при основании — *1 балл*.

2). Задача сведена к доказательству двух равенств $\angle EAF = \angle DCF$ и $\angle CAF = \angle ACF$ — *2 балла*.

3). Доказано равенство $\angle EAF = \angle DCF$ — *3 балла*.

4). Доказано равенство $\angle CAF = \angle ACF$ — *4 балла*.

*Замечание.* Школьник более старшего класса мог бы доказать равенство треугольников $\triangle AEC$ и $\triangle CDA$ исходя из того, что $AE = CD$, $AC$ — общая, а углы $\angle E$ и $\angle D$ — прямые. Но семиклассники еще не знают признака равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.

## 8 КЛАСС

**Задача 1.** Пусть $x_1$, $x_2$ — корни уравнения $x^2 + 90x + 14 = 0$. Найдите значение выражения $2x_1^3 + 6x_1^2x_2 + 6x_1x_2^2 + 2x_2^3 - 3x_1^2x_2^2$. *(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $-146388$.

**Решение.** После несложных преобразований получаем

$$2x_1^3 + 6x_1^2x_2 + 6x_1x_2^2 + 2x_2^3 - 3x_1^2x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^3 - 3(x_1x_2)^2.$$

Согласно теореме Виета, в исходном квадратном уравнении

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -90, \\ x_1x_2 = 14. \end{cases}$$

Поэтому значение выражения равно

$$2(x_1+x_2)^3 - 3(x_1x_2)^2 = 2\cdot(-90)^3 - 3\cdot 14^2 = -2\cdot 729000 - 3\cdot 196 = -1458588.$$

**Критерии оценивания.**
1). Выписана теорема Виета для корней данного уравнения — *1 балл.*
2). Многочлен задачи выражен через многочлены, присутствующие в теореме Виета — *6 баллов.*
3). Проведены верные вычисления — *2 балла.*

*Замечание.* Школьники могут решать эту задачу по-другому — непосредственно находя корни уравнения (они равны $-45 \pm \sqrt{2011}$) и вычисляя затем значение выражения. В этом случае нахождение корней оценивается в *2 балла*, а дальнейшие вычисления — еще в *8 баллов*. Если корни найдены неверно, дальнейшая проверка не производится, так как результат вычислений заведомо неправилен.

**Задача 2.** Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Кодовый замок на чемодане имеет три колесика, каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций. Чемодан должен открыться, если колесики установлены строго в определённой комбинации. Однако, из-за ветхости механизма замка, чемодан откроется, если любые два колёсика из трёх поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колёсиков.) *(П.Н. Кочугаев)*

**Ответ.** Не прав.

**Решение.** По условию, чтобы открыть, нужно задать комбинацию двух колесиков, а их $8 \cdot 8 = 64$.

**Задача 3.** Числа $P$, $P-10$, $P+10$ — простые. Докажите, что число $P-2$ — тоже простое. *(Д.А. Еремин)*

**Решение.** Числа $P - 10$ и $P - 1$ дают одинаковый остаток при делении на 3. Числа $P + 10$ и $P + 1$ дают одинаковый остаток при делении на 3. Так как из трех подряд идущих чисел ровно одно делится на 3, то среди чисел $P$, $P - 10$ и $P + 10$ одно делится на 3. Так как даны простые числа, то $P - 10 = 3$ (иначе либо $P$, либо $P + 10$ делится на меньшее число 3 и поэтому не является простим числом). Следовательно, $P = 13$. Поэтому $P - 2 = 11$ — простое число.

**Критерии оценивания.**
1). Рассмотрена делимость на 3 — *1-3 балла.*
2). Доказано, что одно число делится на 3 — *5-7 баллов.*
3). Верное решение с арифметической ошибкой — *8-9 баллов.*

**Задача 4.** После окончания конференции трое учёных выехали на такси из санатория “Математик” на железнодорожный вокзал. Такси ехало с такой постоянной скоростью $v$, чтобы приехать как раз к отходу поезда. В пути машина сломалась, и учёные сразу вызвали другое такси, которое выехало с вокзала. С какой постоянной скоростью должно было ехать второе такси, чтобы учёные смогли успеть к отходу поезда? *(О.Г. Костров)*

**Ответ.** Со скоростью $\geqslant 2v$.

**Решение.** Пусть расстояние от места поломки первого такси до вокзала равно $s$, тогда оставшееся время с момента поломки первого такси до отхода поезда равно $t = \frac{s}{v}$, откуда $s = vt$. Второе такси должно проехать расстояние, равное $s + s = 2s$, поскольку машина должна проехать от вокзала до места поломки первого такси и то же расстояние в обратном направлении. Следовательно, скорость второго такси должна быть не меньше $\frac{2s}{t} = \frac{2vt}{t} = 2v$.

**Критерии оценивания.**
1). Задача решена для частного случая — *4 балла*.
2). Рассмотрен *произвольный* момент поломки первого такси и показано, что скорость должна быть *равна* $2v$ — *8 баллов*.
3). Указано, что скорость второго такси должна быть *не меньше* $2v$ — дополнительно *2 балла*.
4). Указан только правильный ответ — *2 балла*.

**Задача 5.** В параллелограмм вписана окружность (то есть окружность касается каждой стороны параллелограмма). Доказать, что этот параллелограмм — ромб. *(О.Г. Костров)*

**Решение.** Соединим центр $O$ окружности радиусами $OK$, $OL$, $OM$, $ON$ с точками касания окружности со сторонами параллелограмма $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ соответственно, а также центр $O$ окружности с вершинами параллелограмма. Прямоугольные треугольники $\triangle OBK$ и $\triangle OBL$ равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle OBK = \angle OBL$, $BK = BL$ по свойствам касательных, $OB$ — общая). Прямоугольные треугольники $\triangle ODM$ и $\triangle ODN$ также равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle ODM = \angle ODN$, $DM = DN$ по свойствам касательных, $OD$ — общая). С другой стороны, и треугольники $\triangle OBK$ и $\triangle ODM$ равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle BOK = \angle DOM$ как вертикальные, $OK = OM$ как радиусы, $\angle OKB = \angle OMD = 90^\circ$). Отсюда следует, что $BK = BL = DN = DM$. Аналогично можно доказать равенство прямоугольных треугольников $\triangle OAK$, $\triangle OAN$, $\triangle OCL$, $\triangle OCM$, откуда следует, что $AK = AN = CL = CM$. Таким образом, получим равенство $AB = AK + KB = CL + LB = BC = CM + MD = CD = AN + ND = AD$, которое и означает, что параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

**Критерии оценивания.**
1). Показано равенство треугольников $\triangle OBK$, $\triangle OBL$ (или треугольников $\triangle OAK$, $\triangle OAN$) — *3 балла*.
2). Показано равенство треугольников $\triangle OBK$, $\triangle OMD$ (или треугольников $\triangle OAK$, $\triangle OCM$) — *4 балла*.

3). Получено равенство $AB = BC$ (или равенство $AB = AD$) – *3 балла.*

## 9 КЛАСС

**Задача 1.** Какое максимальное количество шахматных коней можно расставить на доске $8 \times 8$ так, чтобы они не били друг друга? Шахматный конь ходит "буквой Г": сначала на 2 клетки по горизонтали или вертикали, затем на 1 клетку в перпендикулярную сторону. *(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** 32 коня.

**Решение.** Рассмотрим шахматную доску, клетки которой выкрашены в белый и черный цвета. При своем ходе конь меняет цвет клетки, на которой стоит. Поэтому если расставить коней на одноцветные клетки (например, черные), то кони не будут бить друг друга. Так как черных клеток на доске $8 \times 8$ всего 32, то 32 коня, не бьющих друг друга, на ней расставить можно.

Докажем, что нельзя расставить большее число фигур (то, что приведенный способ расстановки оптимален, пока не доказано). Пусть на доске стоит 33 коня. Покажем, что тогда как минимум два из них бьют друг друга. Разрежем доску на участки меньшего размера – $4 \times 2$ клетки. Согласно принципу Дирихле, найдется хотя бы один такой участок, на котором стоят минимум 5 коней.

Возможны два основных варианта. Если на одной из горизонтальных полосок размером $4 \times 1$ стоят 4 коня, то все 4 клетки оставшейся полоски находятся под боем. Значит, на какой бы из них ни стоял оставшийся конь, условие его "неприкосновенности" нарушится. Если же кони стоят на 3 из 4 клеток одной из полосок размером $4 \times 1$, то не под боем находится всего одна клетка другой полоски. Но на этой другой полоске стоят $5 - 3 = 2$ коня, поэтому один из них находится под боем. Поэтому в каждой полоске размером $4 \times 2$ находится не более 4 коней, а общее количество коней на шахматной доске – не более 32.

**Критерии оценивания.**

1). Присутствует идея, что коней надо ставить лишь на одноцветные клетки – *4 балла.*

2). Приведена расстановка и верно вычислено число коней – *2 балла.*

3). Доказано, что большее количество коней расставить не удастся – *4 балла.*

**Задача 2.** Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Кодовый замок на чемодане имеет три колесика, каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций. Чемодан должен открыться, если колесики установлены строго в определённой комбинации. Однако, из-за ветхости механизма замка, чемодан откроется, если любые два колёсика из трёх поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колёсиков.) *(П.Н. Кочугаев)*

**Ответ.** Не прав.

**Решение.** По условию, чтобы открыть, нужно задать комбинацию двух колесиков, а их $8 \cdot 8 = 64$.

**Задача 3.** В строку выписано 5 натуральных чисел: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5. *(П.Н. Кочугаев)*

**Решение.** Рассмотрим 5 чисел: $a_1$, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. Если одно из них делится на 5, то утверждение справедливо. В противном случае при делении на 5 они дают в остатке какие-то из четырех чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки, по крайней мере, двух из выписанных 5 чисел совпадают. Тогда их разность делится на 5. Но разность эта – одно из чисел, данных в задаче, или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

**Задача 4.** Решить уравнение $x(x+1)(x+2) + (x+2)(x+3)(x+4) + (x+4)(x+5)(x+6) = 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \cdot 9$.
*(П.Н. Кочугаев, О.Г. Костров, А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $x = 3$.

**Решение.** Раскроем скобки в левой части уравнения:

$$x^3 + 3x^2 + 2x + x^3 + 9x^2 + 26x + 24 + x^3 + 15x^2 + 74x + 120 = 774, \Rightarrow$$
$$3x^3 + 27x^2 + 102x - 630 = 0, \Rightarrow x^3 + 9x^2 + 34x - 210 = 0.$$

Заметим, что число $x = 3$ является корнем исходного уравнения, поэтому полученный многочлен делится на двучлен $x-3$ без остатка. Выделим множитель $x-3$: $x^3+9x^2+34x-210 = (x-3)(x^2+12x+70)$, тогда уравнение примет вид $(x-3)(x^2+12x+70) = 0$. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2+12x+70$ равен $D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 70 = 144 - 280 = -136 < 0$ – отрицателен, поэтому других вещественных корней, кроме $x = 3$, исходное уравнение не имеет.

**Критерии оценивания.**

1). Тем или иным способом подобран корень $x = 3$ – *4 балла*.
2). Кубический многочлен поделен на $x - 3$, задача сведена к исследованию квадратного трехчлена – *3 балла*.
3). Показано, что у квадратного трехчлена нет действительных корней – *3 балла*.

*Замечание.* Комплексными корнями квадратного трехчлена являются $-6 \pm i\sqrt{34}$. Если школьник стал находить комплексные корни (хотя это и не требуется), но допустил при этом ошибку, из итоговой суммы вычитается *1 балл*.

**Задача 5.** К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника. *(П.Н. Кочугаев)*

**Ответ.** 3 см.

**Решение.** Треугольник, отсечённый данной касательной, подобен исходному. Чтобы найти коэффициент подобия, вычтем из высоты исходного треугольника диаметр вписанной окружности, который найдём по формуле площади треугольника ($S = pr$, где $p$ — полупериметр треугольника, $r$ — радиус вписанной окружности) и разделим эту разность на длину высоты 8 см. Получим $k = \frac{1}{4}$. Поэтому искомый отрезок равен $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ см.

## 10 КЛАСС

**Задача 1.** Какое максимальное количество шахматных коней можно расставить на доске $2012 \times 2012$ так, чтобы они не били друг друга? Шахматный конь ходит "буквой Г": сначала на 2 клетки по горизонтали или вертикали, затем на 1 клетку в перпендикулярную сторону. *(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $\frac{2012^2}{2} = 2024072$ коня.

**Решение.** Рассмотрим шахматную доску, клетки которой выкрашены в белый и черный цвета. При своем ходе конь меняет цвет клетки, на которой стоит. Поэтому если расставить коней на одноцветные клетки (например, черные), то кони не будут бить друг друга. Так как черных клеток на доске с размерами $2012 \times 2012$ имеется ровно половина — $\frac{2012^2}{2} = 2024072$, то 2024072 коня, не бьющих друг друга, на ней расставить можно.

Докажем, что нельзя расставить большее число фигур (то, что приведенный способ расстановки оптимален, пока не доказано). Пусть на доске стоит 2024073 коня. Покажем, что тогда как минимум два из них бьют друг друга. Разрежем доску на участки меньшего размера — $4 \times 2$ клетки. Согласно принципу Дирихле, найдется хотя бы один такой участок, на котором стоят минимум 5 коней.

Возможны два основных варианта. Если на одной из горизонтальных полосок размером $4 \times 1$ стоят 4 коня, то все 4 клетки оставшейся полоски находятся под боем. Значит, на какой бы из них ни стоял оставшийся конь, условие его "неприкосновенности" нарушится. Если же кони стоят на 3 из 4 клеток одной из полосок размером $4 \times 1$, то не под боем находится всего одна клетка другой полоски. Но на этой другой полоске стоят $5 - 3 = 2$ коня, поэтому один из них находится под боем. Поэтому в каждой полоске размером $4 \times 2$ находится не более 4 коней, а общее количество коней на шахматной доске — не более 2024072.

**Критерии оценивания.**

1). Присутствует идея, что коней надо ставить лишь на одноцветные клетки — *4 балла*.

2). Приведена расстановка и верно вычислено число коней — *2 балла*.
3). Доказано, что большее количество коней расставить не удастся — *4 балла*.

**Задача 2.** Сумма трех различных натуральных чисел равна 2013. Найти их, если НОД этих чисел наибольший из возможных. *(П.Н. Кочугаев)*

**Решение.** Разложим 2013 на простые множители: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Сумма трех этих чисел делится на НОД слагаемых. Число $11 \cdot 61 = 671$ не может быть НОД указанных чисел, так как числа натуральные и различные. Следовательно, наибольшим из возможных НОД может быть только $3 \cdot 61 = 183$. Разбив $11 = 6 + 3 + 2$ на сумму трех чисел подбираем: $3 \cdot 6 \cdot 61 = 1089$, $3 \cdot 3 \cdot 61 = 549$, $2 \cdot 3 \cdot 61 = 366$.

**Замечание.** Представление числа 11 в виде суммы трех различных чисел не единственное, возможны и другие ответы.

**Задача 3.** Пусть $a$ — действительное число, отличное от нуля. Известно, что $x_1, x_2$ — корни уравнения $x^2 + ax - \dfrac{1}{2a^2} = 0$. Докажите, что $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$. *(Д.А. Еремин)*

**Решение.** По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = -\dfrac{1}{2a^2}. \end{cases}$$

Искомое неравенство получим, использовав неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$
$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{2a^4} = a^4 + \frac{1}{2a^4} + 2 \geqslant 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{2a^4}} + 2 = 2 + \sqrt{2}.$$

**Критерии оценивания.**
1). Найдены корни или использована теорема Виета — *1-2 балла*.
2). Найдено значение выражения $x_1^4 + x_2^4$ — *3-6 баллов*.
3). Использовано неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, либо задача решена другим методом — *7-10 баллов*.

**Задача 4.** Елочная гирлянда состоит из 2013 лампочек, каждая из которых может светить красным или желтым светом. Лампочки меняют свой цвет (с красного на желтый или с желтого на красный) через $n_1$, $n_2$, $n_3$, $\ldots$, $n_{2013}$ секунд соответственно, где $n_1$, $n_2$, $n_3$, $\ldots$, $n_{2013}$ — различные нечетные и попарно взаимно простые натуральные числа. В какой-то момент времени все лампочки светили желтым светом. Доказать, что найдется момент времени, в который все лампочки будут светить красным светом. *(О.Г. Костров)*

**Решение.** По условию, $i$-ая лампочка меняет свой цвет (с красного на желтый или с желтого на красный) через $n_i$ секунд. Тогда через $M \cdot n_i$ секунд, где $M$ — произвольное нечетное натуральное число, $i$-ая лампочка будет иметь цвет, отличный от первоначального. Например, через $n_i \cdot n_k$ секунд $i$-ая и $k$-ая лампочки поменяют свои цвета, так как $n_i$ и $n_k$ — нечетные натуральные числа ($i$ и $k$ — любые различные натуральные числа из интервала от 1 до 2013). Аналогично через $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{2013}$ секунд все лампочки поменяют свои цвета, так как $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2013}$ — нечетные натуральные числа (в этом случае для $i$-ой лампочки нечетное число равно $M = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdot \ldots \cdot n_{2013}$). Поскольку в какой-то момент все лампочки гирлянды светили желтым светом, то ровно через $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_{2013}$ секунд все лампочки будут светить другим светом, то есть все лампочки гирлянды будут светить красным светом, что и требовалось доказать.

**Критерии оценивания.**
1). Замечено, что $i$-ая лампочка через $M \cdot n_i$ секунд меняет свой цвет, где $M$ — произвольное нечетное натуральное число — *3 балла*.
2). Замечено, что $i$-ая и $k$-ая лампочки поменяют свои цвета через $n_i \cdot n_k$ секунд — *4 балла*.

**Задача 5.** В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ угол $\angle C$ — прямой, гипотенуза $AB = 10$, угол $\angle B = 30^\circ$. Биссектриса $AK$ и высота $CH$ пересекаются в точке $O$. Прямая $BO$ пересекает катет $AC$ в точке $L$. Найдите $AL$.

*(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $AL = 2$.

**Первое решение.** Так как отрезки $AK$, $BL$ и $CH$ пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BH}{HA} = 1.$$

Поскольку $AK$ — биссектриса, то $\dfrac{CK}{KB} = \dfrac{CA}{AB} = \dfrac{1}{2}$ (катет $AC$ лежит против угла в $30^\circ$). Рассмотрим $\triangle AHC$. В нем $\angle H$ — прямой, $\angle C = 30^\circ$, $AC = 5$. Отсюда $AH = 2,5$ и, значит, $HB = 7,5$. Поэтому $\dfrac{BH}{HA} = 3$. Теперь, возвращаясь к теореме Чевы, получим $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{2}{3}$. Но так как $AC = 5$, то $AL = 2$.

**Второе решение.** В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ угол $\angle C$ — прямой, угол $\angle B = 30^\circ$, поэтому угол $\angle A = 60^\circ$ и катет $AC$ равен половине гипотенузы $AB = 10$, то есть $AC = 5$. В треугольнике $\triangle ACH$ отрезок $AO$ — биссектриса, поэтому $\angle CAO = \angle HAO = 30^\circ$. Это означает, что треугольник $\triangle AOC$ — равнобедренный. Катет $BC$ найдем в треугольнике $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $BC = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$.

Опустим перпендикуляр $OM$ из точки $O$ на отрезок $AC$, тогда $OM$ — медиана, поэтому $AM = MC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{5}{2}$. Найдем остальные стороны треугольника $\triangle AOM$. Пусть катет, лежащий против угла $\angle MAO = 30^\circ$, равен

$OM = x$, тогда гипотенуза равна $AO = 2x$, и поэтому по теореме Пифагора имеем $x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = (2x)^2$, то есть $3x^2 = \frac{25}{4}$, откуда $OM = x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Треугольники $\triangle BCL$ и $\triangle OML$ подобны, поскольку угол $\angle L$ — общий, $\angle BCL = \angle OML = 90°$. Следовательно, справедливо равенство $\frac{BC}{OM} = \frac{CL}{ML}$, или равенство $BC \cdot ML = CL \cdot OM$. Обозначим $ML = y$, тогда $CL = CM + ML = \frac{5}{2} + y$, поэтому получим $5\sqrt{3}y = \frac{5\sqrt{3}}{6}\left(\frac{5}{2} + y\right)$, откуда $6y = \frac{5}{2} + y$, $y = \frac{1}{2}$. Таким образом, $AL = AM - ML = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$.

**Критерии оценивания.**

1). Есть указание на теорему Чевы – *4 балла*.

2). Найдено отношение $\frac{CK}{KB}$ – *2 балла*.

3). Найдено отношение $\frac{BH}{HA}$ – *2 балла*.

4). Найдено отношение $\frac{AL}{LC}$ – *1 балл*.

5). Найдена длина $AL$ – *1 балл*.

6). Найдены стороны треугольника $\triangle ABC$ – *2 балла*.

7). Найден отрезок $OM$ – *3 балла*.

8). Получено подобие треугольников $\triangle BCL$ и $\triangle OML$ – *3 балла*.

## 11 КЛАСС

**Задача 1.** Пусть $x_1$, $x_2$, $x_3$ – корни уравнения $3x^3 - 4x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$. Найдите значение выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}$. *(П.Н. Кочугаев)*

**Ответ.** $-\frac{7}{5}$.

**Решение.** По обобщенной теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4}{3}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1, \quad x_1x_2x_3 = \frac{5}{6}.$$

Тогда получим

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 3x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{7}{5}.$$

**Критерии оценивания.**

1). Записаны уравнения Виета, связывающее корни уравнения $x_1$, $x_2$, $x_3$ – по *2 балла* за каждое уравнение.

2). Получена запись искомого выражения через симметрические многочлены $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$, $x_1x_2x_3$ – еще *3 балла*.

**Задача 2.** Все точки трехмерного пространства раскрашены в три цвета, причем каждый цвет использован. Верно ли, что найдутся две точки на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга: а) разных цветов; б) одного цвета?

*(О.Г. Костров, П.Н. Кочугаев, А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** а) Верно; б) верно.

**Решение.** а) По условию задачи каждый из трех цветов использован, тогда в пространстве обязательно найдутся две точки $A$ и $B$ разных цветов. Пусть расстояние между этими точками равно $a$. Рассмотрим такое $n \in \mathbb{N}$, что $n\sqrt{2} > \frac{a}{2}$, тогда равнобедренный треугольник со сторонами $a$, $n\sqrt{2}$, $n\sqrt{2}$ существует. Рассмотрим такой равнобедренный треугольник в пространстве, две из трех вершин которого суть точки $A$ и $B$, а третья вершина — точка $C$.

Теперь предположим от противного, что в пространстве не найдется двух точек разных цветов на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга. Это означает, что на отрезке $AC$ точки, которые делят этот отрезок на $n$ равных частей длины $\sqrt{2}$, имеют тот же цвет, что и точка $A$. Поэтому и точка $C$ имеет тот же цвет, что и точка $A$. С другой стороны, на отрезке $BC$ точки, которые делят этот отрезок на $n$ равных частей длины $\sqrt{2}$, имеют тот же цвет, что и точка $B$. Поэтому и точка $C$ имеет тот же цвет, что и точка $B$. Следовательно, точка $C$ одновременно окрашена в два разных цвета, что невозможно. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и поэтому в пространстве найдутся две точки разных цветов на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга.

б) Рассмотрим четыре точки пространства $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, являющиеся вершинами правильной треугольной пирамиды, у которой все ребра равны $\sqrt{2}$ (такая пирамида называется *тетраэдром*). Тогда по принципу Дирихле среди этих четырех точек обязательно найдутся по крайней мере две точки $A_i$ и $A_j$, окрашенные в один цвет (поскольку цветов всего три, а точек — четыре) и отстоящие друг от друга на расстояние $\sqrt{2}$.

**Критерии оценивания.**
1). Доказано, что в пространстве найдутся две точки на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга разных цветов — *6 баллов*.
2). Доказано, что в пространстве найдутся две точки на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга одного цвета — *4 балла*.

**Задача 3.** Доказать, что десятичная запись числа $2013^9 + 1$ содержит по крайней мере четыре одинаковые цифры. *(Д.А. Еремин)*

**Решение.** Оценим число

$$2013^9 + 1 > 2000^9 + 1 = 512 \cdot 10^{27} + 1.$$

Таким образом, исходное число состоит не менее, чем из 30 цифр. Если исходное число содержит 31 или больше цифр, то по принципу Дирихле найдутся по крайней мере четыре одинаковые цифры. Если же исходное число состоит из 30 цифр, и все цифры встречаются менее четырех раз, то каждая цифра встречается ровно три раза. Тогда сумма цифр равна 135, и число должно делится на 3. Это противоречит условию, поскольку число $2013^9 + 1$ не делится на 3.

*Замечание.* Само число равно 542742678981731354128205477374.

**Критерии оценивания.**

1). Найдено само число с арифметической ошибкой — *0 баллов*.

2). Произведена оценка количества цифр в числе: показано, что число содержит не менее 31 цифры — *2 балла*.

3). Произведена оценка количества цифр в числе: показано, что число содержит не менее 30 цифр — *4 балла*.

4). В предположении, что число содержит 30 цифр, показано, что число должно делиться на 3 — *4 балла*.

**Задача 4.** Решить уравнение $2^{3x-2} - 4^x = 5^x(9 - 3^x)$. *(И.И. Чучаев)*

**Ответ.** $x = 2$.

**Решение.** Запишем уравнение в виде

$$2^{3x-2} - 4^x = 5^x(9 - 3^x), \Rightarrow 4^x(2^{x-2} - 1) = 9 \cdot 5^x(1 - 3^{x-2}).$$

Нетрудно видеть, что: 1) при $x > 2$ левая часть уравнения — положительная, а правая часть уравнения — отрицательная, поэтому ни при каких $x > 2$ левая часть уравнения не равна правой части уравнения; 2) при $x < 2$ левая часть уравнения — отрицательная, а правая часть уравнения — положительная, поэтому ни при каких $x < 2$ левая часть уравнения также не равна правой части уравнения; 3) при $x = 2$ и левая, и правая части уравнения равны нулю. Таким образом, число $x = 2$ — единственный корень уравнения.

**Критерии оценивания.**

1). Найден корень уравнения $x = 2$ — *3 балла*.

2). Доказано, что других корней у уравнения нет — *7 баллов*.

**Задача 5.** Посередине каждой из сторон правильного треугольника пристраивается равносторонний треугольник, сторона которого в три раза меньше исходной. Далее посередине каждого из прямолинейных отрезков, составляющих границу полученной фигуры, пристраивается треугольник, сторона которого в три раза меньше сторон треугольников, пристроенных на предыдущем шаге, и т.д. до бесконечности. Найдите площадь получающейся снежинки Коха, если длина стороны большого треугольника равна $a$. *(А.О. Сыромясов)*

**Ответ.** $\dfrac{2}{5}a^2\sqrt{3}$.

**Решение.** Площадь большого треугольника равна $S = \dfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Площадь каждого из пристроенных на первом шаге треугольников в 9 раз меньше ($9 = 3^2$ — квадрат коэффициента подобия). Пристройка каждого из этих треугольников превращает сторону треугольника в ломаную из 4 звеньев, так что на каждом следующем шаге будет пристроено в 4 раза больше треугольников, чем на предыдущем шаге, и площадь каждого из них в 9 раз меньше, чем у треугольника, пристроенного на предыдущем шаге. Поэтому площадь снежинки Коха равна

$$S\cdot\left(1+3\cdot\frac{1}{9}+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+3\cdot4^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3+\ldots\right)=S\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)=$$

$$=S\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)=\frac{8}{5}\cdot S=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}=\frac{2}{5}a^2\sqrt{3}.$$

**Критерии оценивания.**

1). Площадь равностороннего треугольника (исходного или любого другого) выражена через его сторону — *2 балла*.

2). Задача сведена к нахождению суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии — *5 баллов*.

3). Сумма прогрессии найдена, площадь снежинки вычислена — *3 балла*.

*Замечание.* Если в решении не учтено, что на первом шаге число треугольников утраивается, а на всех остальных шагах — учетверяется, из полученной суммы вычитается 3 балла.